

Bài 1. (4 điểm)

Giải các phương trình sau:

a) $\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$

b) $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{6}$

Bài 2. (2 điểm)

Cho x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + 4x + a = 0$; x_3, x_4 là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + 36x + b = 0$. Biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm a, b .

Bài 3. (4 điểm)

a) Trong một cái hộp có đựng 40 quả bóng, gồm 10 quả bóng xanh được đánh số từ 1 đến 10; 10 quả bóng đỏ được đánh số từ 1 đến 10; 10 quả bóng vàng được đánh số từ 1 đến 10 và 10 quả bóng trắng được đánh số từ 1 đến 10. Hai quả bóng cùng màu mang số 1 và số 10 được gọi là một “cặp may mắn”. Người ta lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 6 quả bóng. Tính xác suất để trong 6 quả bóng lấy ra có ít nhất một “cặp may mắn”.

b) Giả sử $3x^2 - 2^3 \cdot 2x - 3^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{13}x^{13} + a_{14}x^{14}$. Tính a_{11} .

Bài 4. (4 điểm)

a) Tính: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-2}}{2 - \sqrt{x-2} \cdot \sqrt[3]{x+5}}$

b) Cho các số thực a, b, c thỏa điều kiện $15a + 5b + 3c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0, 3]$.

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ đôi một vuông góc với nhau. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , SA , AB , SC .

a) Chứng minh $MN = PQ$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ; d là đường thẳng qua M và song song với SA . Đường thẳng d cắt SG tại O . Chứng minh rằng O cách đều các điểm S, A, B, C .

c) Tính độ dài đoạn SG theo a, b, c .

Bài 6. (2 điểm)

Lớp học có 40 học sinh, trong đó nam nhiều hơn nữ. Một buổi tối, tất cả đi xem hát. Trong lần giải lao thứ nhất, mỗi bạn nữ mua một cái bánh phô mai và mỗi bạn nam mua một cốc cô-ca (giá tiền của 1 bánh phô mai là a ngàn đồng, 1 cốc cô-ca là b ngàn đồng với a, b là các số nguyên). Trong lần giải lao thứ hai, mỗi bạn nữ mua một cốc cô-ca và mỗi bạn nam mua một cái bánh phô mai. Lần giải lao thứ hai, cả lớp tiêu ít hơn lần giải lao thứ nhất là 2 ngàn đồng. Hỏi có bao nhiêu nam và bao nhiêu nữ?

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (4 điểm) Giải các phương trình sau:

a/ $\frac{1 - \cos 2x}{\sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$ (*). Điều kiện: $\sin x \cos x \neq 0$ (0,5đ)

(*) $\Leftrightarrow \sin^2 2x = \sin x \sin 2x$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$ (1đ)

b/ $\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{6}$

$\Leftrightarrow 2 \cos(2x - \frac{\pi}{6}) + 2 \sin(2x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{6}$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow 2\sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{12}) = \sqrt{6}$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow \sin(2x + \frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (0,5đ)

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{12} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{24} + k\pi \end{cases}$ (0,5đ)

Bài 2. (2 điểm)

Cho x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + 4x + a = 0$; x_3, x_4 là 2 nghiệm của phương trình $x^2 + 36x + b = 0$. Biết rằng x_1, x_2, x_3, x_4 theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm a, b .

Giải

Theo định lý Viete ta có: $x_1 + x_2 = -4$; $x_1 x_2 = a$; $x_3 + x_4 = -36$; $x_3 x_4 = b$ (0,25đ)

Gọi q là công bội của cấp số nhân $x_1, x_2, x_3, x_4 \Rightarrow q^2 = \frac{x_3 + x_4}{x_1 + x_2} = \frac{-36}{-4} = 9 \Rightarrow q = \pm 3$ (0,5đ)

Với $q = 3$ ta được $x_1 = -1; x_2 = -3; x_3 = -9; x_4 = -27 \Rightarrow a = 3, b = 243$ (0,5đ)

Với $q = -3$ ta được $x_1 = 2; x_2 = -6; x_3 = 18; x_4 = -54 \Rightarrow a = -12, b = -972$ (0,5đ)

Thử lại điều kiện có nghiệm ta nhận được 2 cặp (a, b) : $(3; 243)$ và $(-12; -972)$ (0,25đ)

Bài 3. (4 điểm)

a/ Trong một cái hộp có đựng 40 quả bóng, gồm 10 quả bóng xanh được đánh số từ 1 đến 10; 10 quả bóng đỏ được đánh số từ 1 đến 10; 10 quả bóng vàng được đánh số từ 1 đến 10 và 10 quả bóng trắng được đánh số từ 1 đến 10. Hai quả bóng cùng màu mang số 1 và số 10 được gọi là “cặp may mắn”. Người ta lấy ngẫu nhiên từ hộp ra 6 quả bóng. Tính xác suất để trong 6 quả bóng lấy ra có ít nhất một “cặp may mắn”.

Giải

Nhận thấy rằng có tất cả 4 “cặp may mắn”.

Đầu tiên ta chọn một “cặp may mắn” và 4 quả bóng bất kỳ từ 38 quả bóng còn lại. Số trường hợp xảy ra là: $C_4^1 \cdot C_{38}^4$. Nhưng theo cách tính này thì ta đã đếm dư một số trường hợp có hai “cặp may mắn”.

(0,5đ)

Kế tiếp ta sẽ chọn hai “cặp may mắn” và 2 quả bóng bất kỳ từ 36 quả bóng còn lại. Số trường hợp xảy ra là: $C_4^2 \cdot C_{36}^2$. Nhưng theo cách tính này thì ta đã đếm dư một số trường hợp có ba “cặp may mắn”.

(0,5đ)

Số trường hợp có ba “cặp may mắn” là C_4^3 .

Như vậy số trường hợp có ít nhất một “cặp may mắn” là $C_4^1 \cdot C_{38}^4 - C_4^2 \cdot C_{36}^2 - C_4^3 = 291484$

(0,5đ)

Xác suất để có ít nhất một “cặp may mắn” là $P = \frac{291484}{C_{40}^6} = \frac{291484}{3838380} \approx 0,076$

(0,5đ)

b/ Giả sử $3x^2 - 2^3 \cdot 2x - 3^8 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{13}x^{13} + a_{14}x^{14}$. Tính a_{11} .

Giải

$$(3x^2 - 2)^3 = \sum_{i=0}^3 C_3^i (3x^2)^{3-i} (-2)^i = \sum_{i=0}^3 C_3^i x^{6-2i} \cdot 3^{3-i} (-2)^i \quad (0,5đ)$$

$$(2x - 3)^8 = \sum_{i=0}^8 C_8^i (2x)^{8-i} \cdot (-3)^i = \sum_{i=0}^8 C_8^i x^{8-i} \cdot 2^{8-i} \cdot (-3)^i \quad (0,5đ)$$

Số hạng chứa x^{11} là: $C_3^0 x^6 \cdot 3^3 \cdot (-2)^0 + C_3^1 x^4 \cdot 3^2 \cdot (-2)^1 + C_3^2 x^2 \cdot 3^1 \cdot (-2)^2 + C_3^3 x^0 \cdot 3^0 \cdot (-2)^3$

(0,5đ)

Hệ số của x^{11} là: $a_{11} = -C_3^0 \cdot C_8^3 \cdot 2^5 \cdot 3^6 + C_3^1 \cdot C_8^1 \cdot 2^8 \cdot 3^3 = -1140480$

(0,5đ)

Bài 4. (4 điểm)

$$a/ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1} \cdot \sqrt[3]{x-2}}{2 - \sqrt{x-2} \cdot \sqrt[3]{x+5}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} \cdot (\sqrt[3]{x-2} - 1)}{2 - \sqrt[3]{x+5} - \sqrt[3]{x+5} \cdot (\sqrt{x-2} - 1)} \quad (0,5đ)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3} - \sqrt{x+1} \cdot \frac{\sqrt[3]{x-2} - 1}{x-3}}{\frac{2 - \sqrt[3]{x+5}}{x-3} - \sqrt[3]{x+5} \cdot \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x-3}} = \quad (0,5đ)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{-1}{2 + \sqrt{x+1}} - \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt[3]{x-2})^2 + \sqrt[3]{x-2} + 1}}{\frac{-1}{4 + 2\sqrt[3]{x+5} + (\sqrt[3]{x+5})^2} - \frac{\sqrt[3]{x+5}}{\sqrt{x-2} + 1}} = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{2}{3}}{-\frac{1}{12} - 1} = \frac{11}{13} \quad (1đ)$$

b/ Cho các số thực a, b, c thỏa điều kiện $15a + 5b + 3c = 0$. Chứng minh rằng phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[0, 3]$.

Giải

$$15a + 5b + 3c = 0 \Leftrightarrow 45a + 15b + 9c = 0 \Leftrightarrow 5(9a + 3b + c) + 4c = 0$$

$$\Leftrightarrow 5f(3) + 4f(0) = 0 \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(3) = f(0) = 0 & (1) \\ f(3) \cdot f(0) < 0 & (2) \end{cases} \quad (0,5đ)$$

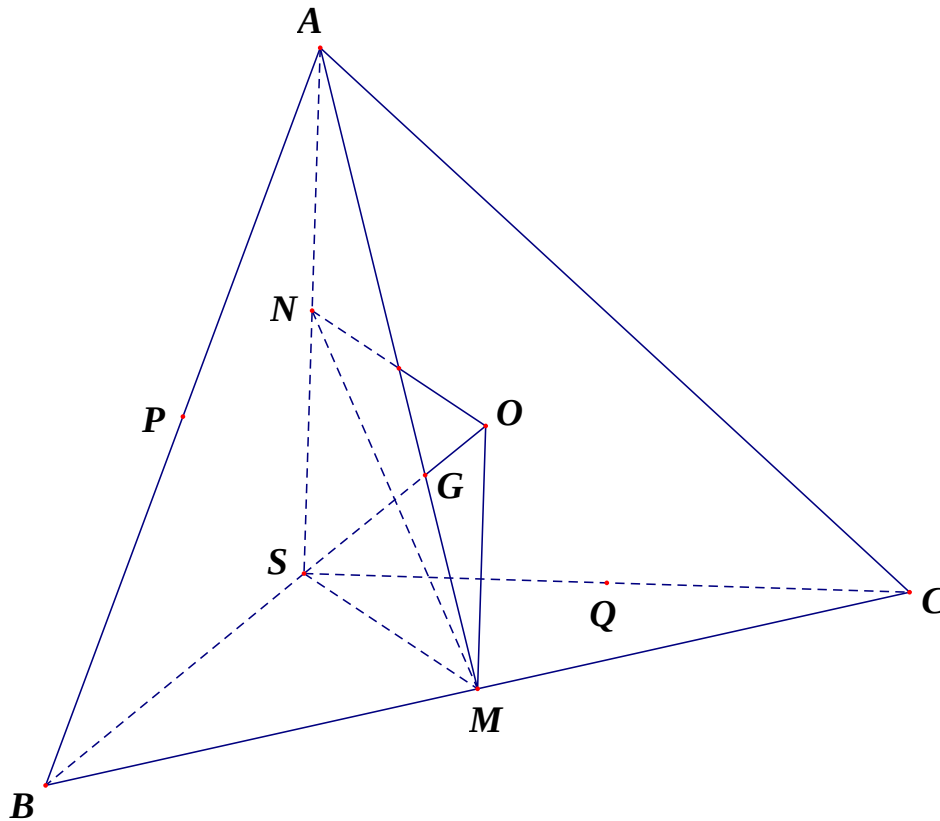
(1) $\Rightarrow$ phương trình có 2 nghiệm $x = 0, x = 3$ (0,5đ)

(2) và $f(x) = ax^2 + bx + c$ liên tục trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ phương trình có ít nhất một nghiệm thuộc $[0; 3]$. (0,5đ)

Bài 5. (4 điểm)

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$ đôi một vuông góc với nhau. Gọi M , N , P , Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , SA , AB , SC .



a/ Chứng minh $MN = PQ$.

SA, SB, SC đôi một vuông góc nên $SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp SM$. (0,25đ)

$$MN = \sqrt{SM^2 + SN^2} = \sqrt{\frac{BC^2}{4} + \frac{SA^2}{4}} = \sqrt{\frac{SA^2 + SB^2 + SC^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$$

Chứng minh tương tự ta có $PQ = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$ (0,5đ)

Suy ra $MN = PQ$ (0,25đ)

b/ Chứng minh rằng O cách đều các điểm S, A, B, C .

$$\text{Ta có } OM \perp (SBC) \Rightarrow OM \perp SM \quad (0,5\text{đ})$$

$$MB = MC = MS \Rightarrow OB = OC = OS \quad (0,5\text{đ})$$

$$\text{Ta có } \frac{OM}{SA} = \frac{GM}{GA} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = SN \quad (0,5\text{đ})$$

$$\Rightarrow OMSN \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow ON \perp SA \Rightarrow OS = OA \quad (0,5\text{đ})$$

Suy ra O cách đều các điểm S, A, B, C .

c/ Tính độ dài đoạn SG theo a, b, c .

$$\text{Ta có } \frac{SG}{OG} = \frac{SA}{OM} = 2 \Rightarrow SG = 2OG \quad (0,5\text{đ})$$

$$\Rightarrow SG = \frac{2}{3}SO = \frac{2}{3}MN = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{3} \quad (0,5\text{đ})$$

Bài 6. (2 điểm)

Lớp học có 40 học sinh, trong đó nam nhiều hơn nữ. Một buổi tối, tất cả đi xem hát. Trong lần giải lao thứ nhất, mỗi bạn nữ mua một cái bánh phô mai và mỗi bạn nam mua một cốc cô-ca (giá tiền của 1 bánh phô mai là a ngàn đồng, 1 cốc cô-ca là b ngàn đồng với a, b là các số nguyên). Trong lần giải lao thứ hai, mỗi bạn nữ mua một cốc cô-ca và mỗi bạn nam mua một cái bánh phô mai. Lần giải lao thứ hai, cả lớp tiêu ít hơn lần giải lao thứ nhất là 2 ngàn đồng. Hỏi có bao nhiêu nam và bao nhiêu nữ?

Giải

$$\text{Gọi } x \text{ là số nam và } y \text{ là số nữ. Ta có } x > y \text{ và } x + y = 40. \quad (0,25\text{đ})$$

$$\text{Số tiền tiêu ở lần giải lao thứ nhất: } ay + bx \quad (0,25\text{đ})$$

$$\text{Số tiền tiêu ở lần giải lao thứ hai: } ax + by \quad (0,25\text{đ})$$

$$\text{Theo đề bài ta có phương trình: } ay + bx - ax - by = 2 \quad (0,25\text{đ})$$

$$\Rightarrow (b - a)(x - y) = 2 \quad (0,25\text{đ})$$

$$\text{Do } x + y \text{ chẵn nên } x - y \text{ chẵn} \quad (0,25\text{đ})$$

$$\Rightarrow x - y = 2 \Rightarrow x = 21, y = 19 \quad (0,5\text{đ})$$